Prednáška 5

5.1. Fourierove rady

Základná myšlienka: Nech $\mathbf{x} \in H$ a $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ je ortonormálny systém v H, dá sa tento prvok rozvinúť do radu $x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots, c_n\phi_n + \dots$? Ako nájdeme c_i, $i = 1, 2, \dots$? Vynásobme obe strany skalárne funkciou ϕ_i, potom

$$\langle \mathbf{x}, \phi_i \rangle = c_1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + c_2 \langle \phi_2, \phi_i \rangle + \dots, c_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle + \dots = c_i, \ i = 1, 2, \dots.$$

Pokiaľ nepovieme inak, hovoríme o konvergencii v priestore H v klasickom zmysle, tj. o konvergencii v norme $\|*\| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$.

Definícia 5.1.1.

Súčet prvých n členov Fourierovho radu prvku $\mathbf{x}$ podľa systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazývame čiastočný súčet Fourierovho radu prvku $\mathbf{x}$ a označujeme ho $S_n(\mathbf{x})$. Teda

$$S_n(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{x}_k.$$

Pri kovergencii Fourierovho radu prvku $\mathbf{x}$ budeme teda hovoriť o konvergencii čiastočných súčtov tohto Fourierovho radu (v danej norme, teda $\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \to \mathbf{0}$).

Veta 5.1.2 (O jednoznačnosti).

Nech $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortogonálny systém v H. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\mathbf{x}_n$ konverguje k $\mathbf{x}$, potom koeficienty c_n sú určené vzťahom $c_n = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_n\rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$

Definícia 5.1.3.

Ak $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortogonálny systém v H, potom číslo $c_n = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_n\rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$ nazývame n-tým Fourierovým koeficientom prvku $\mathbf{x}$ podľa tohto systému a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}_n\rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}\mathbf{x}_n$$

nazývame Fourierovým radom prvku $\mathbf{x}$.

Poznámka 5.1.4.

Z vety o jednoznačnosti vyplýva, že Fourierov rad ľubovoľného prvku $\mathbf{x}$ konverguje a je zároveň Fourierovým radom svojho súčtu $\mathbf{y}$. Nedokázali sme ale, že tento Fourierovov rad prvku $\mathbf{x}$ konverguje práve k tomuto prvku. Vo všeobecnosti to ani nie je pravda, viď nasledujúci príklad, kde $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Taktiež nie je každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\mathbf{x}_n$ Fourierovým radom nejakého prvku $\mathbf{x}$.

Príklad 5.1.5.

Systém $\{\sin nx\}$, $n \in \mathbb{N}$ je ortogonálny v $H = \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$, ale Fourierov rad funkcie $f(x) = \cos x$ je podľa totho systému rad samých núl a teda k f nekonverguje.

Zhrnieme si teda otvorené otázky.

1. Konverguje v H Fourierov rad každého prvku $\mathbf{x} \in H$?
2. Kedy konverguje Fourierov rad prvku $\mathbf{x} \in H$ k tomuto prvku ?
3. Kedy pre každé $\mathbf{x} \in H$ konverguje Fourierov rad prvku $\mathbf{x} \in H$ k tomuto prvku ?

4. Aké musia byť koeficienty c_n, aby rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n$ konvergoval v H ?

Najpr uvedieme tvrdenie, ktoré hovorí o vyjadrení blízkosti čiastočných súčtov Fourierovho radu daného prvku $\mathbf{x}$.

Veta 5.1.6 (Besselova identita)**.**

Platí

$$\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \, \|\mathbf{x}_k\|^2 \, .$$

Poznámka 5.1.7.

Ortogonálna množina funkcií $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ generuje lineárny podpriestor priestoru H. Funkcia (prvok) $\mathbf{x}$ vo všeobecnosti v tomto podpriestore neleží. Ak uvážime Besselovmu identitu, je vidieť, že n-tý čiastočný súcet Fourierovho radu funkcie $\mathbf{x}$ je vlastne jej kolmým priemetom do podpriestoru tvoreného množinou funkcií $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$.

Nasledujúca veta hovorí, že zo všetkých možných čiastočných súčtov má najmenšiu odchýlku od daného prvku $\mathbf{x}$ práve čiastočný súčet jeho Fourierovho radu.

Veta 5.1.8.

Pre ľubovoľné $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{x}_k$ a pre $S_n(\mathbf{x})$ z platí

$$\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \|T_n - \mathbf{x}\| \, ,$$

pričom rovnosť nastáva práve pre $T_n = S_n(\mathbf{x})$,

Veta 5.1.9 (Besselova nerovnosť).

Pre $\mathbf{x} \in H$ platí

(i) $\|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|\mathbf{x}_n\|^2$,

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|\mathbf{x}_n\|^2$ konverguje, $\lim_{n\to\infty} |c_n| \, \|\mathbf{x}_n\| = 0$,

(iii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n$ konverguje v H.

Z vety o jednoznačnosti okamžite vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.1.10 (Parsevalova rovnosť).

Fourierov rad prvku $\mathbf{x}$ konverguje k tomuto prvku práve vtedy, ak platí

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|\mathbf{x}_n\|^2 \, .$$

Prečo vlastne neudávame len rovnosť už vo vete 5.1.9? Lebo Besselova nerovnosť platí všeobecnejšie v ľubovoľnom Hilbertovom priestore, kde si zvolíme nejaký ortogonálny systém, podľa ktorého funkciu rozvíjame. V prípade, že tento systém je úplný, dostávame analogickú Parsevalovu rovnosť.

Uvedieme tvrdenie, ktoré nám dáva odpoveď na otázky č. 1,4.

Veta 5.1.11 (Rieszova-Fisherova).

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{x}_n$ konverguje (v H) $\Leftrightarrow$ ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \, \|\mathbf{x}_n\|^2$. Ak je táto podmienka splnená, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{x}_n$ Fourierovým radom svojho súčtu.

Odpoveď na otázku 3 súvisí s "bohatosťou" systému $\{\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}\}$ - hovoríme o úplnosti daného systému. Odpoveď na otázku č. 2 je zrejme tá, že prvok $\mathbf{x}$ musí byť z lineárneho obalu systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Veta 5.1.12.

Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

I. $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je úplný.

II. Pre každé $\mathbf{x} \in H$ platí Parsevalova rovnosť.

III. Pre každé $\mathbf{x} \in H$ jeho Fourierov rad podľa systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k $\mathbf{x}$.

IV. Množina všetkých lineárnych kombinácií konečne veľa prvkov zo systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je hustá v H.

Veta 5.1.13.

Nech $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}^2_w(a,b)$ a $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}^2_w(c,d)$. Potom $\{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}^2_w((a,b)\times(c,d))$.

5.2. Trigonometrické rady

Myšlienka konštrukcie Fourierových trigonometrických radov je založená na snahe aproximovať reálne funkcie reálnej premennej pomocou trigonometrických funkcií sin a cos. Našim cieľom bude vyjasnenie podmienok pre funkciu f, definovanú na intervale $(-\pi,\pi)$, ktoré zaručia jej rozvinutie do radu.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{5.1}$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Taktiež nás zaujíma charakter konvergencie takejto rady. Ak si označíme čiastočný súčet rozvoja funkcie f ako

$$s_0(x;f) = \frac{a_0}{2}, \quad s_p(x;f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,\ p \in \mathbb{N},$$

potom môžeme (pomocou známych vzorcov) čiastočný súčet zapísať pomocou

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \ p \in \mathbb{N}_0,$$

pričom

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Rad teda formálne zapisujeme aj v tvare

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{5.2}$$

Poznámka 5.2.1.

V niektorej literatúre sa stretávame s Fourierovým radom (polynómom) v tvare

$$\frac{P_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} P_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

kde $\omega > 0$ a $\phi_k \in (-\pi, \pi]$, $k = 1, \ldots, n$. Je to kvôli fyzikálnej interpretácii zložiek, tj. číslo $\frac{P_0}{2}$ je stacionárna a $P_k \cos(k\omega x + \phi_k)$ je k-ta harmonická zložka rozloženého signálu, kde P_k, resp. ϕ_k je amplitúda, resp. počiatočná fáza k-tej harmonickej zložky.

Veta 5.2.2 (O jednoznačnosti)**.**

Nech $f \in L^1(-\pi,\pi)$ a nech rad (5.1) resp. (5.2) konverguje rovnomerne na $[-\pi,\pi]$ k f. Potom platí:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ \ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

resp. (5.4)

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,\ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

Poznámka 5.2.3.

Keďže pre čísla a_n, b_n a c_n z predchádzajúcej vety platia vzájomné vzťahy, tak čiastočné súčty oboch radov sú rovnaké.
Fourierove koeficienty rozvoja funkcie $f \in L^1(-\pi,\pi)$ nezávisia na hodnotách funkcie f na množine nulovej miery. Keďže systém goniometrických funkcií, podľa ktorého rozvíjame danú funkciu, sú $2\pi-$periodické, sú také aj čiastočné súčty radu a ak existuje aj súčet tohto radu. Preto sa možno obmedziť na skúmanie takýchto funkcií.

Prejdeme k skúmaniu bodovej resp. rovnomernej konvergencie Fourierových radoch. V praxi sa často stretávame s funkciami (a ich deriváciami), ktoré tvoria nasledujúcu triedu funkcií.

Definícia 5.2.4.

Hovoríme, že funkcia f je po častiach spojité na intervale $[a,b]$, akk existujú body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ tak, že na intervaloch (x_{i-1}, x_i), $i = 1,\ldots,n$ je f spojitá a v týchto bodoch existujú vlastné jednostranné limity. Symbolom $C^a_{2\pi}$ budeme označovať množinu $2\pi-$periodických funkcií (na $\mathbb{R}$), ktoré sú na intervale $[a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$ po častiach spojité.

Problém 5.2.5.

Prečo platí, že ak $f, f' \in C^a_{2\pi}$ potom je f aj z $\mathcal{L}^1(a, a+2\pi) \cap \mathcal{L}^2(a, a+2\pi)$?

Označme si Fourierov rad funkcie f ako $s(x; f)$ podľa systému goniometrických funkcií. Potom platí nasledujúce tvrdenie o bodovej konvergencii, ktoré hovorí, že pre rozmuné funkcie konverguje Fourierov rad danej funkcie v každom bode a v bodoch spojitosti k funkčnej hodnote tejto funkcie.

Veta 5.2.6.

Nech je $f, f' \in C^a_{2\pi}$, potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$s(x; f) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x_0^-} f(t) + \lim_{t \to x_0^+} f(t)\right).$$

Navyše je táto konvergencia rovnomerná na uzavretých podintervaloch intervalu, kde je f spojitá a ak je $f \in C(\mathbb{R})$, tak aj na celom $\mathbb{R}$.

Dôsledok 5.2.7.

Ak je $f, f' \in C^{-\pi}_{2\pi}$ a $f(-\pi) = f(\pi)$, potom jej Fourierov rad konverguje rovnomerne k f na $[-\pi, \pi]$

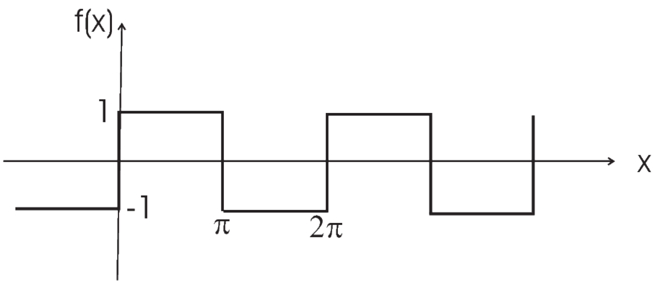
Ak chceme rady derivovať po členoch (napr. pri riešení rovníc matematickej fyziky), potrebujeme vo všeobecnosti rovnomernú konvergenciu a príslušnú hladkosť danej funkcie. V tomto prípade nám stačí hladkosť derivácií funkcie f po častiach.

Veta 5.2.8 (Derivovanie po členoch)**.**

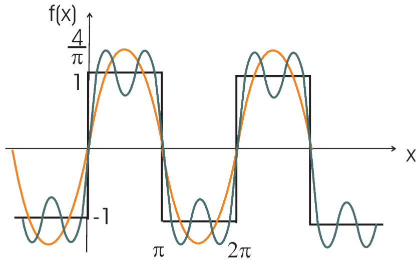
Nech $f^{(k-1)} \in C(\mathbb{R})$ je $2\pi-$periodická a $f^{(k)}, f^{(k+1)} \in C^a_{2\pi}$, $k \geq 0$ na $\mathbb{R}$, potom pre $s = 0, 1, \ldots, k$ rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s(|a_n| + |b_n|), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^s |c_n|,$$

konvergujú. Navyše Fourierov rad funkcie f k nej konverguje rovnomerne na $\mathbb{R}$ a je možné ho k-krát derivovať po členoch, pričom tieto rady kovergujú rovnomerne na $\mathbb{R}$.



(a) Periodické predĺženie funkcie $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (def. na intervale $-\langle\pi,\pi\rangle$.)



(b) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

Obr. 5.1: Fourierov rad periodickej funkcie.

Poznámka 5.2.9.

Je dobré si uvedomiť, že rady vytvorené z derivácií členov Fourierovho radu funkcie f sú Fourierovými radmi derivácií tejto funkcie, lebo z periodičnosti f je $c_0 = 0$ pre $f^{(s)},\ s > 0$.

Veta 5.2.10 (Integrovanie po členoch)**.**

Nech je $f \in C_{2\pi}^{-\pi}$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, potom je funkcia $F(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$ aj jej derivácia z $C_{2\pi}^{-\pi}$ a je spojitá na $\mathbb{R}$. Navyše Fourierov rad funkcie f k nej konverguje rovnomerne na $\mathbb{R}$ a je rovný radu, ktorý dostaneme integráciou po členoch od 0 do x.

Poznámka 5.2.11.

Podmienka $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ nám zaručí, že aj F je $2\pi-$periodická. Ak nie je splnená táto podmienka , potom $F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$ už je $2\pi-$periodická.

Definícia 5.2.12.

Periodickým predĺžením funkcie $f \in C^a_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$ budeme nazývať funkciu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in (a, a+2\pi), \\ f(x-2k\pi), & \text{ak } x \in (a+2k\pi, a+2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to a^-} f(t) + \lim\limits_{t\to a^+} f(t)\right), & \text{ak } x = a+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Podobne sa dá definovať periodické predĺženie na intervale inej dĺžky. Zavedieme si aj nové typy predĺžení, ktoré majú dobré vlastnosti.

Definícia 5.2.13.

(Ne)párnym periodickým predĺžením funkcie $f \in C^0_\pi$ budeme nazývať funkciu $\tilde{f}$, ktorá vznikne tak, že najprv predĺžime f na $[-\pi, \pi]$: $f(-x) = \mp f(x)$, $x \in [-\pi, 0]$,tj. (ne)párne, a potom túto funkciu rozšírime periodicky na celé $\mathbb{R}$.